Μιγαδικές Συναρτήσεις.

$z = x+iy \in \mathbb{C}$ (όπου $x, y \in \mathbb{R}$) (αλγεβρική μορφή)
$= (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$\rightarrow$ $z_1+z_2 = (x_1+iy_1)+(x_2+iy_2) = (x_1, y_1)+(x_2, y_2)$
$= (x_1+x_2,\ y_1+y_2)$
$= (x_1+x_2)+i(y_1+y_2)$

, Το άθροισμα των z_1, z_2.

▸ Πολλαπλασιασμός 2 μιγαδικών αριθμών $z_1 = x_1+iy_1$,
$z_2 = x_2+iy_2$

(*) Έτσι ώστε με την πιο πάνω πρόσθεση και τον πολλαπλασιασμό που ορίζουμε κατάλληλα να ισχύουν οι πράξεις σώματος και $i^2 = ii = -1 \Rightarrow$

$z_1z_2 = (x_1+iy_1)(x_2+iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i(y_1x_2 + x_1y_2)$

<u>Άσκηση</u>: Πράγματι με έτσι ορισμένα $+$ και $\cdot$ και $i^2=-1$ στο $(\mathbb{C},+,\cdot)$ είναι σώμα και επεκτείνει το $(\mathbb{R},+,\cdot)$.

<u>Π.χ</u>

Το $1 \in \mathbb{R}$ αντιστοιχεί στο $1 = (1,0) = 1+0i \in \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα $\forall z = x+yi \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$

$1z = (1+0i)(x+yi) = x+(0x+1y)i = x+iy = z$.

και $\forall z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ $\exists$ ο αντίστροφος του z, συμβολίζεται με $z^{-1} = \frac{1}{z} \in \mathbb{C}^*$.

Ποιος είναι αυτός; (είναι μοναδικός;) $\rightarrow$ Έχουμε $z = x+yi \in \mathbb{C}^*$ δοσμένο. Θέλω να βρω $w = a+bi \in \mathbb{C}$ έτσι ώστε $zw = 1 = 1+0i$

$= (x+yi)(a+bi) = (xa-yb)+i(ya+xb) \Leftrightarrow$

$(xa-yb,\ ya+xb) = (1,0)$. Το $\mathbb{C}$ αντ. στο $\mathbb{R}^2$. $\Leftrightarrow \begin{cases} xa-yb=1 \\ xb+ya=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow \omega = a+bi = \frac{1}{x^2+y^2} = (x-yi)$

Δηλαδή για $z = x+yi \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C}\setminus\{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

ο αντίστροφος $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{(-y)}{x^2+y^2}\, i$

<u>Άσκηση/Παρατήρηση</u>: (α) Ο πολ/σμός στο $\mathbb{C}$ επεκτείνει τον πολ/σμό στον $\mathbb{R}$. (β) Ο βαθμωτός πολλ. στον $\mathbb{R}^2$ είναι ειδική περίπτωση του πολλ. του $\mathbb{C}$

<u>Λύση</u>

α) «Μπορούμε να δούμε τον πολλ. 2 πραγμ. αριθμών είτε στο $\mathbb{R}$, είτε να δούμε τους αριθμούς ως (ειδικούς) μιγαδικούς να τους πολλαπλ. ως τέτοιους και θα βγει το ίδιο αποτέλεσμα»

Προφανώς $x_1x_2 = (x_1+0i)(x_2+0i) = (x_1x_2-0) - (x_1 0 + x_2 \cdot 0)i$
$= x_1x_2 + 0i = x_1x_2.$

β) αντίστοιχα: $az = a(x+yi) = a(x,y) \overset{\mathbb{R}^2}{=} (ax, ay) = (ax)+(ay)i$

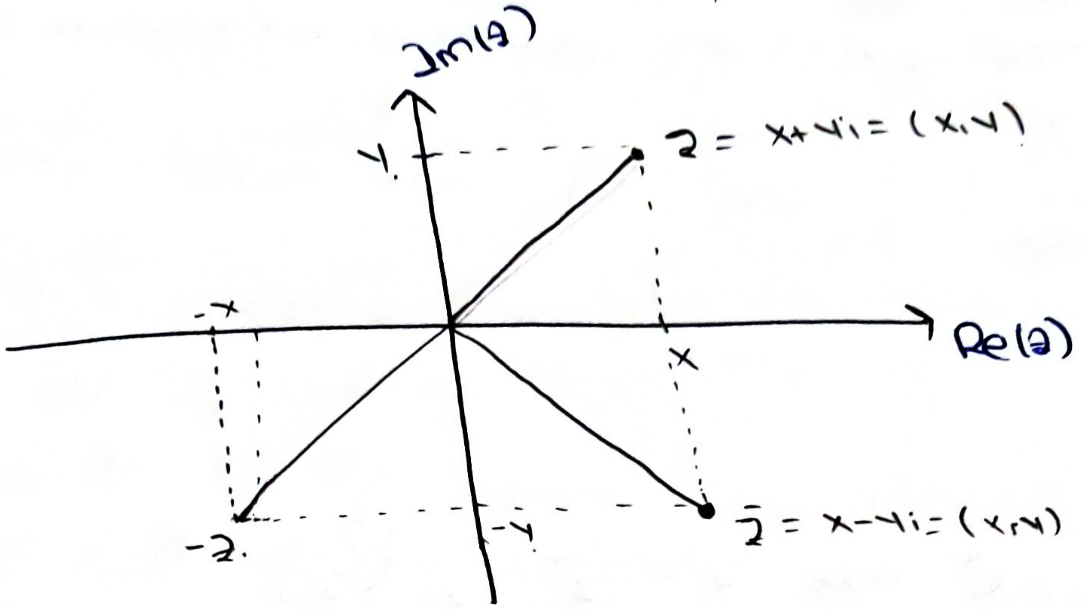
$\Downarrow$

$= a+0i = (a+0i)(x+yi) = (ax-0y)+i(0x+ay)$
$= (ax)+i(ay)$

<u>Ορισμός</u>: Έστω $z = x+yi \in \mathbb{C}\ (x,y\in\mathbb{R})$. Τότε $Re(z)=x$ ονομάζεται πραγματικό μέρος του z. <u>και</u> $Im(z)=y$ ονομάζεται φανταστικό μέρος του z.

$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \|(x,y)\|$: απόλυτη τιμή (ή μέτρο) του z.

$\bar{z} = x - iy$: συζυγής (μιγαδικός αριθμός) του z.



μιγαδικό επίπεδο $\mathbb{C} \underset{\text{αντιστοιχεί}}{=} \mathbb{R}^2$.

Πρόταση: (απλές ιδιότητες των παραπάνω)
Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, τότε ισχύουν τα εξής:

- $Re(z) = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, • $Im(z) = \dfrac{z-\bar{z}}{2i}$, • $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
- $|-z| = |z| = |\bar{z}|$, • $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, • $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$,
- $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ και ισχύουν οι ανισότητες:

$\boxed{|Re(z)|, |Im(z)| \leq |z|}$ και ισχύει ότι $\boxed{|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|}$.

$\quad\ \ \overset{\shortparallel}{|x|} \qquad\quad \overset{\shortparallel}{|y|} \qquad\quad \overset{\shortparallel}{\|(x,y)\|}$

Απόδ.

Άσκηση εκτός από τα εξής:

1) $z = x+yi$, $(x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow \bar{z} = x - yi \Rightarrow z + \bar{z} = x+yi + x - yi = 2x$

$\Rightarrow x = \dfrac{z+\bar{z}}{2}$, όπου $x = Re(z)$

2) $z\bar{z} = (x+iy)(x-yi) = x^2 - \underbrace{(iy)^2}_{\substack{= i^2 y^2 \\ = -y^2}} = x^2 + y^2 = |z|^2$. κ.λ.π.

Παρατήρηση: Η ιδιότητα $z\bar{z}=|z|^2 \iff |z|=\sqrt{z\bar{z}}$

είναι χρήσιμη. π.χ: αν θέλουμε να υπολογίσουμε

το $\frac{1}{-1+3i}$: υπολογίστε (δηλ. γράψτε σε αλγεβρική μορφή)

το $z=x+yi$

$$\frac{1}{-1+3i}=\frac{(-1-3i)}{(-1+3i)(-1-3i)}=\frac{-1-3i}{(-1)^2-(3i)^2}=\frac{-1-3i}{1-9\cdot i^2}$$

$$=\frac{-1-3i}{1+9}=-\frac{(1+3i)}{(10)}=-\frac{1}{10}-\frac{3}{10}i=\left(-\frac{1}{10},-\frac{3}{10}\right)$$

Άρα αν $z\in\mathbb{C}^*$ τότε $z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{z}\cdot\left(\frac{\bar z}{\bar z}\right)$ ⊛ $\frac{\bar z}{\bar z}=\bar z\cdot\frac{1}{\bar z}=\bar z\cdot\bar z^{-1}=1$

$$=\frac{\bar z}{z\cdot\bar z}=\frac{\bar z}{|z|^2}$$

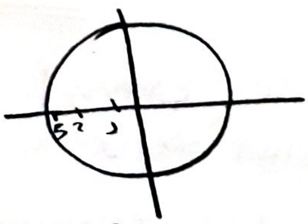
δηλαδή $\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+i\,\frac{-y}{x^2+y^2}$ (άσκηση 1)

Παρατήρηση: Για $i=0+i$ έχουμε $Re(i)=0$, $Im(i)=1$,
$|i|=1$. και $\bar i=-i=\frac{1}{i}$

Άσκηση: Περιγράψτε γεωμετρικά το σύνολο $\{z\in\mathbb{C}:|z-i+3|=5\}$ ($\leq$, $\geq$, $<$, $>$)

$z=x+yi=(x,y)$

$|z-i+3|=\|(x,y)-(-3,1)\|=5$



Σπίτι!

Άσκηση: Λύστε $(5-6i)z-9-3i=0$

και $\frac{z-i}{z+i}=i$

Ορισμός: Για $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε την συνάρτηση n-δύναμης ως $z \to z^n = \underbrace{z \cdot z \cdots z}_{n\text{-φορές}}$, $\forall z \in \mathbb{C}$, $\forall n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

$z \longrightarrow z^0 = 1$, $z \in \mathbb{C}$

$z \longrightarrow z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, $z \in \mathbb{C}^*$, $n \in \mathbb{N}$

Ιδιότητες: (Άσκηση)

- $\forall z, w \in \mathbb{C}^*$: $z^n z^m = z^{m+n}$, $(z^n)^m = z^{n \cdot m}$, $(zw)^n = z^n w^n$
- $\forall n, m \in \mathbb{Z}$ (αυτά ισχύουν και για $z=0$ ή $w=0$, αν $n, m \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$)

Θεώρημα:

Άσκηση: Δείξτε ότι : $\overline{z^n} = \bar{z}^n$: $|z^n| = |z|^n$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

$n=0$: $\overline{z^0} = \bar{1} = 1 = \bar{z}^0$

$n = 1, 2, 3, \dots$: $n=1$: $\overline{z^1} = \bar{z} = \bar{z}^1$

$n=2$: $\overline{z^2} = \overline{z z} \underset{\text{πρ.}}{=} \bar{z} \cdot \bar{z} = \bar{z}^2$.

$n = n+1$: $\overline{z^{n+1}} \underset{\text{ορ.}}{=} \overline{z^n \cdot z} \underset{\text{πρ}}{=} \overline{z^n} \cdot \bar{z} = \bar{z}^n \cdot \bar{z} \underset{\text{ορ.}}{=} \bar{z}^{n+1}$

για $n \in \mathbb{N}$: $\overline{z^{-n}} = \bar{z}^{-n} = ;$ $\to$ σπίτι.